Heinrich-Heine-Universität
Prof. Dr. Marcus Zibrowius
Dr. Girish Kulkarni

Sommersemester 2022
26.05.2022

Lineare Algebra II
Blatt 8

1 | Kleine Fische fängt man

Betrachten Sie noch einmal die Endomorphismen von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$ aus Aufgabe 1 auf Blatt 6:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 4 & -4 & 6 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie zu jedem dieser Endomorphismen eine Jordannormalform, sofern eine existiert.

2 | Butter bei die Fische

Bestimmen Sie zu den durch B, C und D in Aufgabe 1 definierten Endomorphismen jeweils eine Jordanbasis, also eine Basis, in der der angegebene Endomorphismus Jordannormalform hat.

3 | Salt & Vinegar

Bestimmen Sie eine Jordannormalform und eine zugehörige Jordanbasis für den durch die folgende Matrix definierten Endomorphismus von $\mathbb{R}^6$:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

4 | Tripotent

Zeigen Sie, dass jeder Endomorphismus f eines endlich-dimensionalen Vektorraums, der $f^3 = f$ erfüllt, diagonalisierbar ist.

5 | Gleichgesinnt

Seien f und g Endomorphismen von $\mathbb{C}^n$ ($n \geqslant 1$), wobei g sogar ein Isomorphismus ist. Zeigen Sie, dass es einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ in $\mathbb{C}^n$ und einen Skalar $a \in \mathbb{C}$ gibt mit $f(\mathbf{v}) = ag(\mathbf{v})$.

6 | Inkompatibel

Geben Sie zwei diagonalisierbare Endomorphismen f und g eines Vektorraums V an, die sich nicht simultan diagonalisieren lassen (also derart, dass keine Basis von V existiert, in der sowohl f als auch g Diagonalgestalt haben.)

Abgabefrist: 13.06.2022, 10:15 Uhr.